Lineare algebraische Gruppen

Vorlesung 3 im Sommersemester 2021 (am 30.04.21)

Hinweis zu den im Text verwendeten Referenzen

Referenz	Bedeutung
x.y.z	Verweist auf den Abschnitt x.y.z im PDF-File zu Kapitel x, z.B verweist 3.2.1 auf Abschnitt 3.2.1 im PDF-File zu Kapitel 3.
Vorlesung x, y.z	Verweist auf den Abschnitt y.z im Text zu Vorlesung x.

Grundlegende Ergebnisse zur Theorie der linearen algebraischen Gruppen

13 Unipotente, nilpotente und auflösbare Gruppe

13.4 Beispiel (vgl. 2.1.5 Aufgabe 4)

Die Gruppe $\mathbf{T}_n$ von 2.1.4 Beipiel 4 (c) ist auflösbar und die Gruppe U_n von 2.1.4 Beispiel 4(d) ist nilpotent

Beweis.

1. **<u>Schritt</u>**: Der Kommutator zweier Elemente von $\mathbf{T}_n$ liegt in $\mathbf{U}_n$,

$$(x, y) = xyx^{-1}y^{-1} \in \mathbf{U}_n \text{ für beliebige } x, y \in \mathbf{T}_n.$$

Jedes Element $x \in \mathbf{T}_n$ hat die Gestalt

$$x = d\bullet(1+m)$$

mit einer umkehrbaren Diagonalmatrix d und einer nilpotenten oberen Dreieckmatrix m (dies ist die Jordan-Zerlegung in $\mathbf{T}_n$). Sei

$$y = e\bullet(1+n)$$

eine weiteres Element von T_n (mit einer umkehrbaren Diagonalmatrix e und einer nilpotenten oberen Dreieckmatrix n). Es gilt

$$\begin{aligned} xy &= d\bullet(1+m)\bullet e\bullet(1+n) \\ &= d\bullet(1+m)\bullet d^{-1}\bullet de\bullet(1+n)\bullet(de)^{-1}\bullet(de) \\ &= (1+\sigma_d(m))\bullet(1+\sigma_{de}(n))\bullet(de) \end{aligned}$$

Dabei bezeichne σ_z die Konjugation mit z, $\sigma_z(w) = zwz^{-1}$. Dieselbe Formel mit x und y vertauscht liefert

$$yx = (1+\sigma_e(n))\bullet(1+\sigma_{ed}(m))\bullet(ed).$$

Damit erhalten wir für den Kommutator

$$\begin{aligned} xyx^{-1}y^{-1} &= (xy)\bullet(yx)^{-1} \\ &= (1+\sigma_d(m))\bullet(1+\sigma_{de}(n))\bullet(de)\bullet(ed)^{-1}\bullet (1+\sigma_{ed}(m))^{-1}(1+\sigma_e(n))^{-1} \end{aligned}$$

Weil die Diagonal-Matrizen d und e miteinander kommutieren, folgt

$$(x,y) = (1+\sigma_d(m))\bullet(1+\sigma_{de}(n))\bullet (1+\sigma_{ed}(m))^{-1}(1+\sigma_e(n))^{-1}$$

Wenn wir eine nilpotente obere Dreiecksmatrix mit einer Diagonalmatrix konjugieren, erhalten wieder eine nilpotente obere Dreiecksmatrix. Auf der rechten Seite steht also ein

Produkt von Elementen der Gruppe $\mathbf{U}_n$ und von Inversen solcher Elemente. Ein solches Produkt liegt wieder in $\mathbf{U}_n$. Wir haben gezeigt

$$(x,y) \in \mathbf{U}_n \text{ für beliebige } x, y \in \mathbf{T}_n.$$

2. **Schritt**. $\mathbf{U}_n$ ist ein Normalteiler von $\mathbf{T}_n$.

Im ersten Schritt haben wir gezeigt,

$$xyx^{-1}y^{-1} \in \mathbf{U}_n \text{ für beliebige } x,y \in \mathbf{T}_n.$$

Ist y sogar ein Element von U_n, so gilt

$$xyx^{-1} = xyx^{-1}y^{-1}y \in \mathbf{U}_n \cdot \mathbf{U}_n \subseteq \mathbf{U}_n ,$$

d.h. es ist

$$xyx^{-1} \in \mathbf{U}_n \text{ für beliebige } x \in \mathbf{T}_n \text{ und beliebige } y \in \mathbf{U}_n,$$

also

$$x\, \mathbf{U}_n x^{-1} \subseteq \mathbf{U}_n \text{ für beliebige } x \in \mathbf{T}_n.$$

2. **Schritt**: Reduktion der Auflösbarkeit von $\mathbf{T}_n$ auf die der Untergruppe $\mathbf{U}_n$.

Es reicht zu zeigen die von den Kommutatoren

$$(x, y) := xyx^{-1}y^{-1} , x,y \in G$$

einer Gruppe G erzeugte Untergruppe[1]

$$(G, G)$$

liegt in Fall $G = \mathbf{T}_n$ ganz in $\mathbf{U}_n$,

$$(\mathbf{T}_n , \mathbf{T}_n) \subseteq \mathbf{U}_n .$$

Denn dann ist

$$\mathbf{T}_n/\mathbf{U}_n$$

eine Faktorgruppe der abelschen Gruppe $\mathbf{T}_n/(\mathbf{T}_n , \mathbf{T}_n)$, also selbst eine abelsche Gruppe. Es reicht, die Auflösbarkeit von $\mathbf{U}_n$ zu beweisen. Die Inklusion

$$(\mathbf{T}_n , \mathbf{T}_n) \subseteq \mathbf{U}_n$$

haben wir aber bereits im ersten Schritt bewiesen.

Weil nilpotente Gruppen auflösbar sind, haben wir damit den Beweis der obigen Aussagen auf den Beweis der Nilpotenz der Gruppe $\mathbf{U}_n$ reduziert.

3. **Schritt**. Konstruktion einer Folge von Untergruppen U_n^r von $\mathbf{U}_n$.

Bezeichne E_{ij} die n×n-Matrix, deren einziger von 0 verschiedener Eintrag sich in der Position (i,j) befindet und gleich 1 ist. Die Matrizen der Gestalt E_{ij} heißen Elementarmatrizen. Es gilt

$$E_{ij} \cdot E_{uv} = \begin{cases} E_{iv} & \text{für } j=u \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

Wir schreiben

---

[1] Es ist sogar ein Normalteiler: innere Automorphismen überführen Kommutatoren in Kommutatoren.

$$\ell(E_{ij}) = j\text{-}i \tag{2}$$

Die Eins steht in E_{ij} auf der Hauptdiagonalen, falls $\ell(E_{ij}) = 0$ gilt. Sie steht eine Position über der Hauptdiagonalen, falls $\ell(E_{ij}) = 1$ gilt, sie steht r Positionen über der Hauptdiagonalen, falls $\ell(E_{ij}) = r$ gilt. Die Menge

$$\sum_{\ell(E_{ij})=r} k\bullet E_{ij}$$

besteht aus den Matrizen, deren einzige von Null verschiedene Einträge genau r Positionen über der Hauptdiagonalen liegen. Aus der Produktformel (1) lesen wir ab,

$$\ell(E_{iu}\bullet E_{uj}) = \ell(E_{ij}) = j\text{-}i = (u\text{-}i) + (j\text{-}u) = \ell(E_{iu}) + \ell(E_{uj}),$$

d.h.

$$\ell(E_{iu}\bullet E_{uj}) = \ell(E_{iu}) + \ell(E_{uj}), \tag{3}$$

Die Gruppe $\mathbf{U}_n$ läßt sich mit Hilfe dieser Bezeichnungen in der folgenden Gestalt schreiben.

$$U_n = 1 + N_n \text{ mit } N_n := \sum_{\ell(E_{ij})\geq 1} k\bullet E_{ij}. \tag{4}$$

Wir setzen

$$N_n^r := \sum_{\ell(E_{ij})\geq r} k\bullet E_{ij}$$

Dann gilt

$$N_n^r \supseteq N_n^{r+1} \text{ und } N_n^n = 0 \tag{5}$$

und

$$\begin{aligned} N_n^r\bullet N_n^s &= \sum_{\ell(E_{ij})\geq r} k\bullet E_{ij}\bullet \sum_{\ell(E_{uv})\geq s} k\bullet E_{uv} \\ &= \sum_{\ell(E_{ij})\geq r} \sum_{\ell(E_{uv})\geq s} k\bullet E_{ij}\bullet E_{uv} \\ &\subseteq \sum_{\ell(E_{ij})\geq r+s} k\bullet E_{ij} \qquad \text{(wegen (1) und (3))} \end{aligned}$$

also

$$N_n^r\bullet N_n^s \subseteq N_n^{r+s} \tag{5}$$

Wir setzen

$$\mathbf{U}_n^r := 1+N_n^r \tag{6}$$

Das Inverse einer Matrix der Gestalt 1 + m mit $m\in N_n^r$ hat die Gestalt

$$1 - m + m^2 - m^3 + - ...,$$

liegt also in $1+N_n^r$, d.h. der Übergang zum Inversen definiert eine Abbildung

$$\mathbf{U}_n^r \longrightarrow \mathbf{U}_n^r,\ x \mapsto x^{-1}.$$

Man beachte $\pm m^i$ ist für große i gleich 0 und liegt für beliebige $i \geq 1$ im k-Vektorraum

$$N_n^{ir} \subseteq N_n^r.$$

Wegen (5) definiert die Matrizen-Multiplikation eine Abbildung

$$\mathbf{U}_n^r \times \mathbf{U}_n^r \longrightarrow \mathbf{U}_n^r,\ (1+m,\ 1+m') \mapsto 1+m+m'+mm',$$

(es gilt $mm' \in N_n^{2r} \subseteq N_n^r$). Wir haben gezeigt,

$\mathbf{U}_n^r$ ist für r = 1,2,..., n eine Untergruppe von $\mathbf{U}_n = \mathbf{U}_n^1$.

4. **Schritt**. Berechnung eines weiteren Kommutators.

Seien $x \in N_n^1$ und $y \in N_n^r$. Wir wollen den Kommutator der Elemente

$$1+x \in U_n \text{ und } 1+y \in U_n^r$$

bestimmen. Wir setzen

$$\begin{aligned} s = (1+x)^{-1} &= \sum_{i=0}^{\infty} (-x)^i \\ &= 1 + x \cdot w \end{aligned}$$

mit

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} (-x)^i \in N_n^1$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} (1+x)\cdot(1+y)\cdot(1+x)^{-1} &= (1+x+y+xy)\cdot(1+x)^{-1} \\ &= (1+x)\cdot(1+x)^{-1} + (y + x\cdot y)\cdot s \\ &= 1 + (y + x\cdot y)\cdot s \\ &= 1 + (y + x\cdot y)\cdot(1+xw) \\ &= 1 + y + xy + yxw + xyxw \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} xy &\in N_n^1 \cdot N_n^r \subseteq N_n^{r+1} \\ yxw &\in N_n^r \cdot N_n^1 \cdot N_n^1 \subseteq N_n^{r+2} \\ xyxw &\in N_n^1 N_n^r N_n^1 N_n^1 \subseteq N_n^{r+3} \end{aligned}$$

also $z := xy + yxw + xyxw \in N_n^{r+1}$

Für beliebige $x \in N_n^1$ und $y \in N_n^r$ ist also

$$(1+x)\cdot(1+y)\cdot(1+x)^{-1} = 1+y+z \text{ mit } z \in N_n^{r+1} \tag{7}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} (1+x,\ 1+y) &= (1+y+z)\cdot(1+y)^{-1} \\ &= (1+y)\cdot(1+y)^{-1} + z\cdot(1+y)^{-1} \\ &= 1 + z\cdot \sum_{i=0}^{\infty} (-y)^i \end{aligned}$$

mit

$$z\cdot(-y)^i \in N_n^{r+1}\cdot N_n^{i\cdot r} \subseteq N_n^{r+1}$$

für jedes i, wobei nur endlich viele $z\cdot(-y)^i$ von 0 verschieden sind. Damit hat der Kommutator für beliebige $x \in N_n^1$ und $y \in N_n^r$ die Gestalt

$$(1+x,\ 1+y) = 1 + u \text{ mit } u \in N_n^{r+1} \tag{8}$$

5. **Schritt**: **U_n^r ist Normalteiler von $\mathbf{U}_n$**

Nach (7) gilt

$$g\cdot U_n^r\cdot g^{-1} \subseteq U_n^r \text{ für beliebige } g \in \mathbf{U}_n.$$

6. **Schritt**: $(\mathbf{U}_n^r, \mathbf{U}_n^r) \subseteq \mathbf{U}_n^{r+1}$

Nach (8) gilt

$$(g, h) \in \mathbf{U}_n^{r+1} \text{ für beliebige } g, h \in \mathbf{U}_n^r.$$

Also liegt die von den Kommutatoren der Elemente von $\mathbf{U}_n^r$ erzeugte Untergruppe ganz in $\mathbf{U}_n^{r+1}$,

$$(\mathbf{U}_n^r, \mathbf{U}_n^r) \subseteq \mathbf{U}_n^{r+1}.$$

Der Kommutator der Restklassen von g und h in $\mathbf{U}_n^r/\mathbf{U}_n^{r+1}$ ist deshalb gleich 1, d.h. die Restklassen von je zwei Elementen g und h in $\mathbf{U}_n^r/\mathbf{U}_n^{r+1}$ kommutieren.

7. **Schritt**: Abschluß des Beweises.

Nach dem fünften Schritt ist

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{U}_n^1 \supset \mathbf{U}_n^2 \supset \ldots \supset \mathbf{U}_n^{n-1} \supset \mathbf{U}_n^n = \{1\}$$

eine Folge von Normalteilern von $\mathbf{U}_n$. Insbesondere ist $\mathbf{U}_n^{r+1}$ ein Normalteiler von $\mathbf{U}_n^r$ für jedes r. Nach dem sechsten Schritt ist

$$\mathbf{U}_n^r/\ \mathbf{U}_n^{r+1}$$

Wir haben gezeigt $\mathbf{U}_n$ - und damit auch $\mathbf{T}_n$ - ist auflösbar.

Auf Grund der im vierten Schritt bewiesenen Identität (8) gilt

$$(\ \mathbf{U}_n, \mathbf{U}_n^r\ ) \subseteq \mathbf{U}_n^{r+1}. \tag{9}$$

Zeigen wir, durch Induktion nach r, aus dieser Inklusion folgt die Inklusion

$$\mathbf{U}_n^{[r]} \subseteq \mathbf{U}_n^{r+1} \tag{10}$$

<u>Induktionsanfang</u>: r = 0 und r = 1:

Es gilt

$$\mathbf{U}_n^{[0]} = \mathbf{U}_n = \mathbf{U}_n^1 \qquad \text{(nach Definition von } \mathbf{U}_n^{[0]})$$

und

$$\mathbf{U}_n^{[1]} = (\mathbf{U}_n^1, \mathbf{U}_n^1) \qquad \text{(nach Definition von } \mathbf{U}_n^{[1]})$$

$$= (\mathbf{U}_n, \mathbf{U}_n^1)$$

$$\subseteq \mathbf{U}_n^2 \qquad \text{(nach (9))}$$

<u>Induktionsschritt</u>: r > 1.

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_n^{[r]} &= (\mathbf{U}_n, \mathbf{U}_n^{[r-1]}) && \text{(nach Definition von } \mathbf{U}_n^{[r]}\text{)}\\ &\subseteq (\mathbf{U}_n, \mathbf{U}_n^r) && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)}\\ &\subseteq \mathbf{U}_n^{r+1} && \text{(nach (9))}\end{aligned}$$

Damit ist (10) bewiesen. Für r = n-1 erhalten wir

$$\mathbf{U}_n^{[n-1]} \subseteq \mathbf{U}_n^n = \{1\}.$$

Nach Bemerkung 13.3 (v) ist $\mathbf{U}_n$ nilpotent.

QED.

13.5 Nilpotenz und Auflösbarkeit unipotenter Gruppen

Jede unipotente lineare algebraische Gruppe ist nilpotent, also auflösbar.
Beweis. Sei G eine unipotente lineare algebraische Gruppe. Nach 2.3.7 (i) können wir annehmen, G ist eine abgeschlossene Untergruppe der $\mathbf{GL}_n$,

$$G \subseteq \mathbf{GL}_n.$$

Nach 2.4.12.B können wir sogar annehmen, G ist eine abgeschlossene Untergruppe einer $\mathbf{U}_n$,

$$G \subseteq \mathbf{U}_n.$$

Es reicht deshalb zu zeigen, daß $\mathbf{U}_n$ nilpotent ist. Der Beweis ergibt sich damit aus Beispiel 13.4 (vgl auch die Bemerkung hinter der Lösung von Aufgabe 4 von 2.1.5).

QED.

13.6 Satz von Kostant-Rosenlicht

Sei G eine unipotente lineare algebraische Gruppe und X ein affiner G-Raum. Dann sind alle Orbits von G in X abgeschlossen.
Beweis. Sei O ein Orbit von G in X. Wir können X durch die Abschließung $\bar{O}$ des Orbits O ersetzen und so erreichen, daß

$$O \text{ dicht in } X$$

ist. Nach 2.3.3(i) ist O offene Teilmenge von X. Wir betrachten die abgeschlossene Menge

$$Y := X - O$$

und deren Ideal $I(Y) \subseteq k[X]$ im Koordinatenring von X. Weil G auf Y operiert, ist I(Y) ein G-stabiler k-linearer Unterraum von k[X]: seien nämlich

$$f\in I(Y),\ g\in G \text{ und } y \in Y.$$

Weil y nicht im Orbit O liegt, kann auch $g^{-1}\bullet y$ nicht in O liegen, d.h. es gilt $g^{-1}\bullet y \in Y$. Es folgt

$$(s(g)f)(x) := f(g^{-1}\bullet y) = 0 \text{ für } g \in G \text{ und } y \in Y.$$

Die Funktion s(g)f ist identisch Null auf Y, liegt also in I(Y). Mit anderen Worten, I(Y) ist G-stabil bezüglich der Operartion

$$s(g): G \longrightarrow \mathrm{Aut}_k\, k[X],$$

welche durch die Operation von G auf X induziert wird.

Nach 2.3.6 A (i) operiert G lokal endlich auf I(Y). Deshalb gibt es ein $f \in I(Y) - \{0\}$ welches bei G fest bleibt,

$$s(g)\bullet f = f \text{ für } g \in G.$$[2]

Deshalb ist f konstant auf dem Orbit O. Weil O dicht liegt in X, ist f konstant auf X. Mit anderen Worten, das Ideal I(Y) enthält eine Konstante von k[X]. Damit gilt

$$I(Y) = k[X].$$

Deshalb ist Y die leere Menge, also $O = X = \overline{O}$. Das Orbit ist abgeschlossen.
QED.

13.7 Aufgabe

Sei G eine Untergruppe der $GL_n = GL(k^n)$, welche in irreduzibler[3] Weise auf k^n operiert. Zeigen Sie, der einzige unipotente Normalteiler von G ist die triviale Untergruppe.
Beweis. Wir setzen

$$V := k^n.$$

Sei N ein unipotenter Normalteiler von G. Nach 2.4.12.B gibt es ein $\xi \in \mathbf{GL}_n$ mit $\xi^{-1} N\xi \subseteq \mathbf{U}_n$. Die Untergruppe

$$\xi^{-1}N\xi$$

besteht aus oberen Dreiecksmatrizen, deren Einträge auf der Hauptdiagonalen gleich 1 sind. Insbesondere gilt

$$\xi^{-1}x\xi\bullet e_1 = e_1 \text{ für jedes } x \in N,$$

also

$$x\xi\bullet e_1 = \xi\bullet e_1 \text{ für jedes } x \in N,$$

Mit $v = \xi\bullet e_1 \in V-\{0\}$ folgt

$$x\bullet v = v \text{ für jedes } x \in N.$$

Weil N ein Normalteiler von G ist, gilt $g^{-1}Ng \subseteq N$ für jedes $g \in G$, also auch

$$g^{-1}xg\bullet v = v \text{ für jedes } x \in N \text{ und jedes } g \in G.$$

also

$$x\bullet gv = gv \text{ für jedes } x \in N \text{ und jedes } g \in G.$$

Damit operieren die Elemente von N wie die identische Abbildung auf den Vektoren der Gestalt

$$gv \text{ mit } g \in G,$$

und damit auch auf dem von diesen Vektoren erzeugen k-linearen Unterraum,

---

[2] Wir fixieren einen G-stabilen von 0 verschiedenen k-linearen Unterraum $W \subseteq I(Y)$ endlicher Dimension. Durch Wahl einer Basis von V erreichen wir, daß G auf W durch Matrizen auf W operiert. Weil die Jordan-Zerlegung mit Homomorphismen algebraischer Gruppen verträglich ist (nach 2.4.8(ii)), operiert G durch unipotente Matrizen auf V. Durch Wechsel der Basis erreichen wir, daß diese Matrizen in U(n) liegen (vgl. 2.1.4 Beispiel 4 (d)). Die Matrizen von U(n) lassen aber den ersten Einheitsvektor fest.

[3] Die Darstellung $G \longrightarrow \mathbf{GL}_n$ soll irreduzibel sein, d.h. es gibt keinen G-stabilen Unterraum, der echt zwischen 0 und k^n liegt.

$$xw = w \text{ für jedes } x \in N \text{ und jedes } w \in W := \sum_{\sigma\in G} k\cdot\sigma v$$

Nach Voraussetzung ist V als Modul über der von G erzeugten k-Teilalgebra

$$A := \sum_{\sigma\in G} k\cdot\sigma \subseteq \mathrm{End}_k(V)$$

von $\mathrm{End}_k(V)$ einfach. Nach dem Satz von Burnside A.3.3.3 gilt

$$A = \mathrm{End}_k(V).$$

Weil der Vektor $v \in V$ ungleich 0 ist, gibt es für jedes Element von V eine k-Linearkombination von Elementen aus G, welche v in dieses vorgegebene Element von V überführt. Mit anderen Worten, es gilt W = V. Die Multiplikation mit einem beliebigen $x \in N$ definiert auf V die identische Abbildung, d.h. es gilt

$$N = \{1\} \subseteq GL_n.$$

QED.

Index

—E—

Elementarmatrix, 2

Inhalt

LINEARE ALGEBRAISCHE GRUPPEN 1

GRUNDLEGENDE ERGEBNISSE ZUR THEORIE DER LINEAREN ALGEBRAISCHEN GRUPPEN 1

13 UNIPOTENTE, NILPOTENTE UND AUFLÖSBARE GRUPPE 1

13.4 Beispiel (vgl. 2.1.5 Aufgabe 4) 1
13.5 Nilpotenz und Auflösbarkeit unipotenter Gruppen 6
13.6 Satz von Kostant-Rosenlicht 6
13.7 Aufgabe 7

INDEX 8

INHALT 8